УДК 513.83

***А.Г. КОШОВИЙ***, магістр, НАУ ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», Харків;
***Г. І. КОШОВИЙ,*** канд. фіз.-мат. наук., доц.,
НАУ ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», Харків

# ОДНОВИМІРНІ САМОПОДІБНІ ФРАКТАЛИ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ У МОДЕЛЮВАННІ

На основі строгої теорії самоподібних фракталів проведено системний аналіз процесу побудови одного класу самоподібних фракталів зі змінною розмірністю Хаусдорфа. Наведені приклади його застосування для впорядкування дофрактальних стрічкових ґраток. Розроблені математичні моделі процесу розсіювання плоскої електромагнітної хвилі та отримані асимптотичні вирази вихідних змінних.

На основе строгой теории самоподобных фракталов проведено системный анализ процесса построения одного класса самоподобных фракталов с переменной фрактальной размерностью. Приведены примеры его использования для упорядочивания предфрактальных ленточных решеток. Разработанные математические модели процесса рассеивания плоской электромагнитной волны и получены асимптотические выражения выходящих переменных.

The construction process of a self-similar fractal's (SSF) class, with variable Hausdorf dimension, is systematically analyzed. Examples of the SSF class usage for ordering prefractal strip grids are presented. Mathematical models of the scattering process of plane electromagnetic waves are developed. Asymptotic expressions of output variables are obtained.

**Вступ.** Класична математика описує той світ, який створила людина (будинки, дороги, квартали сіл та міст, промислові об'єкти тощо) і, зокрема, ті прилади і засоби, що використовуються нею. Але все те, що існувало здавна (гори, хмари, дерева і тому подібне) не може бути описаним за допомогою класичної математики. Це також стосується і різних процесів, що відбуваються з плином часу і є як природними, так і штучними. Тому виникла потреба у розробці нових теорій, які мають справу з досить дивними математичними утвореннями і можуть більш адекватно описувати зазначені природні об'єкти та процеси. До таких теорій відноситься теорія фракталів, основоположником якої вважається *Бенуа Мендельброт*, хоча перші фрактали були побудовані ще до його народження, але не носили таку назву. *Функція Карла Вєйєрштрасса* та *досконала множина Георга Кантора* (ДМК) довго лякали і не сприймались багатьма великими математиками. Але тільки з часом ці перші *самоподібні фрактали* (СПФ) були належно оцінені, коли знайшли своє практичне застосування у багатьох галузях діяльності людини. Щоб у цьому впевнитись досить заглянути на відповідні сторінки світової павутини "Інтернет".

У даній статті проводиться системний аналіз одного з класів СПФ зі змінною *розмірністю Хаусдорфа* (РХ) та на цій основі пропонується ряд математичних моделей (в тому числі і асимптотичної, для якої є явний розв'язок ) процесу розсіювання плоскої електромагнітної хвилі *дофрактальними дифракційними ґратками* (ДФДҐ). Спершу розглянемо процес творення найпростішого з класів СПФ зі змінною РХ, що є першим узагальненням ДМК та проведемо його системний аналіз.

**Системний підхід до процесу побудови СПФ.** Принцип творення ДМК, а також його початковий об'єкт побудови можна в певних межах змінювати. При цьому будуть виникати нові множини з іншими позитивними значеннями фрактальної розмірності та нульовою топологічною розмірністю.

Коли змінити розміри сегментів утворювача класичної ДМК, тобто, наприклад, взяти сегменти відносного розміру $2\alpha$, що розташовані на відносній відстані один від одного, то в результаті нескінченного процесу зменшення утворювача та заміщення ним сегментів виникне СПФ з РХ $\ln 2/\ln\kappa$, де $\kappa = 1+\beta/\alpha$. Для практичного його застосування потрібно виділити окремі елементи процесу творення, подати їх у аналітичному вигляді, а потім знову об'єднати у єдину систему.

Утворювач для даного класу СПФ можна досить просто формалізувати математично, використавши геометричні параметри та параметр $t$, для якого $|t| \le 1$. Це будуть функції

$$2(\beta-\alpha)\ \ x_m^1(t) = (-1)^m \cdot \beta + \alpha \cdot t\,,\ m = 1,2\,;$$

верхній індекс у функцій позначає, що маємо першу стадію побудови чи утворювач (дивись рис. 1). Попередньою стадією вважаємо певний прямолінійний сегмент, скажімо $[-1,1]$, що зветься *ініціатором*, який розміщуємо у основі деревовидної структурної схеми процесу побудови СПФ.

| *Утворювач* | *Перша стадія* | *Друга стадія* | ... | *$n$ – та стадія* |
|---|---|---|---|---|
| $-\beta+\alpha t$ | $-\beta-\beta_2+\alpha_2 t$ | $\beta-\beta_2-\beta_3+\alpha_3 t$ | | $-\beta-\sum_{m=2}^{n}\beta_m+\alpha_n t$ |
| | | $\beta-\beta_2+\beta_3+\alpha_3 t$ | | |
| | $-\beta+\beta_2+\alpha_2 t$ | $\beta+\beta_2-\beta_3+\alpha_3 t$ | ... | ... |
| | | $\beta+\beta_2+\beta_3+\alpha_3 t$ | | $-\beta+\sum_{m=2}^{n}\beta_m+\alpha_n t$ |
| $\beta+\alpha t$ | $\beta-\beta_2+\alpha_2 t$ | $\beta-\beta_2-\beta_3+\alpha_3 t$ | | $\beta-\sum_{m=2}^{n}\beta_m+\alpha_n t$ |
| | | $\beta-\beta_2+\beta_3+\alpha_3 t$ | | |
| | $\beta+\beta_2+\alpha_2 t$ | $\beta+\beta_2-\beta_3+\alpha_3 t$ | ... | ... |
| | | $\beta+\beta_2+\beta_3+\alpha_3 t$ | | $\beta+\sum_{m=2}^{n}\beta_m+\alpha_n t$ |

Рисунок 1 – Структурна схема побудови СПФ з РХ $\ln 2/\ln\kappa$ .

Наступною (другою) стадією побудови є четвірка сегментів, що формалізується такими функціями:

$x_m^2(t) = (-1)^m (\beta + \beta_2) + \alpha_2 t$ для $m = 1,4$ та $x_m^2(t) = (-1)^m(-\beta + \beta_2) + \alpha_2 t$ для ..;
де $\beta_2 = \beta / \kappa$ $\alpha_2 = \alpha / \kappa$.

Подібним чином на основі самоподібності визначаються функції, що відповідають чи, точніше, закріплюють на числовій осі сегменти наступних стадій. Для довільного натурального *n*, що визначає стадію побудови СПФ, маємо впорядковану послідовність функцій $x_m^n(t)$, де $m = 1,...,2^n$. Коли цей процес зобразити у вигляді дерева, то на кожному рівні, що відповідає певній стадії творення, маємо розгалуження у точках $x_m^n(t)$ на дві гілки, які у певному розумінні повторюють все дерево. У цьому і полягає основна властивість самоподібності фракталів даного класу.

**Геометрична ілюстрація процесу творення.** Для геометричної ілюстрації цього процесу творення можна використовувати дуги різного розміру та форми, що опираються на кінці сегментів стадій побудови. На рис.2 показаний процес побудови СПФ з РХ $d_\chi \approx 0.7067$, де використані дуги парабол $y = c(1 - t^2)$ і зображені три стадії творення. Вони вочевидь вказують на самоподібність структури фракталу.

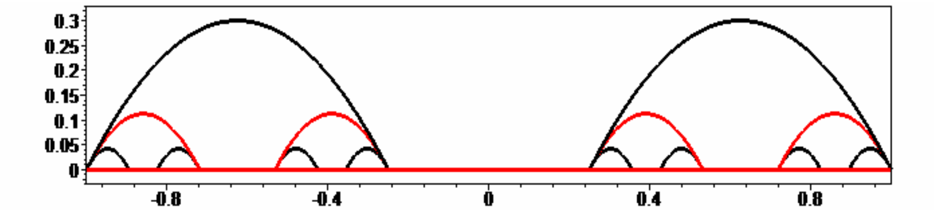


Рисунок 2 – Три стадії процесу побудови СПФ.

Але краще зображувати ці сегменти на різних рівнях, як це показано на рис.3. Тут зображено початковий сегмент та три стадії побудови, зокрема, вісім сегментів третьої стадії на рівні $y = 0.3$.

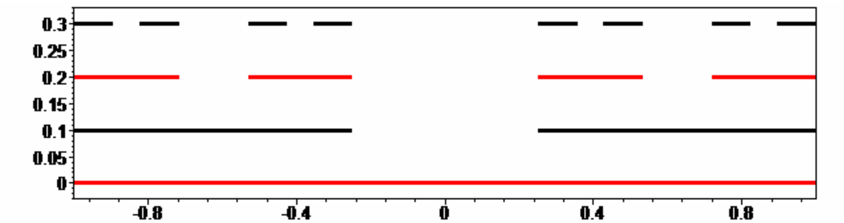


Рисунок 3 – Три стадії процесу побудови СПФ.

Слід зазначити, що алгоритм та програма розрахунку для геометричної ілюстрації створюється на основі структурної схеми і разом з нею є елементами системного аналізу процесу творення.

Наступним більш значним узагальненням є використання дуг різного розміру та форми, що опираються на кінці сегментів утворювача, а процес побудови залишити. В результаті структурна схема побудови визначає тільки абсциси дуг, а в якості ординат можна взяти функції певного типу, наприклад,

$$y = c(1-t^2)(1 \pm 2t)(1 \pm 4t).$$

Геометрична ілюстрація процесу побудови такого класу СПФ наведена на рис.4.

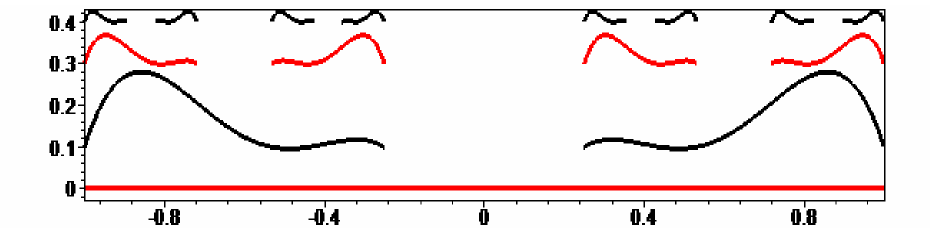


Рисунок 4 – Три стадії процесу побудови "дугового" СПФ.

Після геометричної ілюстрації процесу творення СПФ перейдемо до дослідження основних його властивостей.

**Дослідження основних властивостей СПФ.** Одну з них – властивість самоподібності – вже було зазначено і проілюстровано вище. Перейдемо до виявлення інших, що забезпечують саму назву фракталу.

З принципу творення СПФ та з його геометричної ілюстрації випливає, що лінійна міра досить швидко вичерпується. Доведемо цей факт аналітично.

Маємо розмір ініціатора $2(\beta+\alpha)=2$, на першому етапі він зменшується на величину $2(\beta-\alpha)$. На другому етапі відкидаються два відрізки довжини $2(\beta-\alpha)/\kappa$, $\kappa = 1+\beta/\alpha$, на третьому етапі – чотири відрізки довжини $2(\beta-\alpha)/\kappa/\kappa$ і так до нескінченності. Отже маємо геометричну прогресію

$$2(\beta-\alpha)\left[1+\frac{2}{\kappa}+\frac{2^2}{\kappa^2}+\dots\right] = 2\,\frac{\beta-\alpha}{1-2/\kappa} = 2(\beta+\alpha),$$

сума якої віднімається від довжини ініціатора, тобто лінійна міра СПФ є нульовою.

Можна визначити потужність СПФ, встановивши взаємно однозначну відповідність між сегментами певної стадії творення СПФ та сегментами тієї ж стадії творення класичної ДМК. Таким чином, потужність СПФ є континуум.

Далі слід зазначити, що СПФ містить точки, відмінні від кінців сегментів, яких зліченна кількість: їх можна занумерувати натуральними числами. Тобто у СПФ містяться точки двох типів, при чому потужність множини точок, відмінних від кінців сегментів, дорівнює континууму.

*Розмірність Хаусдорфа* обчислимо подібно до класичної ДМК. При побудові на $n$-тому кроці маємо $2^n$ сегментів довжиною $2\alpha/\kappa^n$ кожний. Тоді мінімальним $\delta$ - покриттям з $\delta = 2\alpha/\kappa^n$ буде покриття з $2^n$ елементів, тобто

$$H_\delta^s = \sum_{i=1}^{2^n} |U_i|^s = 2^n \cdot \left|\frac{2\alpha}{\kappa^{n-1}}\right|^s = \frac{2^n}{\kappa^{(n-1)s}}(2\alpha)^s .$$

Звідси граничний перехід $\delta \to 0$ (або $n \to \infty$) тільки у випадку $2/\kappa^s = 1$ дає відмінне від нескінченності та нуля значення хаусдорфової $s$-міри. Щоб визначити критичне значення s, яке і є за означенням розмірністю Хаусдорфа візьмемо логарифм. В результаті отримаємо наступний вираз для обчислення розмірності Хаусдорфа $d_\chi = \ln 2 / \ln \kappa$ .

Оскільки коефіцієнт самоподібності $\kappa$ є більшим за двійку, то ця розмірність змінюється в інтервалі $(0,1)$. Таким чином, побудована досконала множина має дві основні властивості характерні для ідеальних з математичної точки зору конструкцій, які позначуються терміном *фрактал*. По-перше, побудована множина є самоподібною, а, по-друге, її фрактальна розмірність строго більше нуля, тобто більше топологічної розмірності.

На основі структурної схеми побудови СПФ, де міститься, зокрема, повна інформація про вихідні змінні моделі процесу творення, можна розглядати математичні моделі процесу розсіювання ДФДГ плоскої електромагнітної хвилі у вигляді систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР).

**Математичні моделі процесу розсіювання хвиль ДФДГ.** Загальна постановка задачі розсіювання плоскої електромагнітної хвилі системою ідеально провідних та нескінченно тонких циліндричних стрічок є класичною [1].

Тут є новим провідний об'єкт, який змінює електромагнітне поле внаслідок взаємодії його з плоскою хвилею. Поперечний перетин системи являє собою відповідну кількість сегментів, що утворюють певну стадію творення СПФ зі змінною РХ, тому цю систему циліндричних стрічок доречно назвати *дофрактальною дифракційною ґраткою*.

Перехід від тривимірної фізичної моделі до двовимірної математичної моделі ґрунтується на основі теорії диференціальних рівнянь математичної фізики. В результаті отримуємо двовимірні зовнішні *задачі Діріхле* ($E$ - поляризація) та *Неймана* ($H$ - поляризація) для двовимірного *рівняння Гельмгольця* з відповідною умовою випромінювання на нескінченності та крайовими умовами на кінцях сегментів [1]. За відомим методом інтегральних рівнянь (ІР) вказані двовимірні задачі переводяться до одновимірної задачі розв'язання систем ІР або інтегрально-диференційних рівнянь (ІДР).

Коли на систему набігає плоска $E$ - поляризована хвиля основною математичною моделлю є наступна система сингулярних ІР (СІР):

$$\sum_{m=1}^{2^n} \int_{-1}^{1} \phi_m(t) H_0^{(1)}(|x_\ell^n(\tau) - x_m^n(t)|)dt = \frac{2i}{\pi} \exp[iq_1 x_\ell^n(\tau)]. \qquad (1)$$

У випадку набігання плоскої $H$-поляризованої хвилі, систему ІДР можна перетворити, розв'язуючи її диференціальну частину і вона прийме такий вигляд

$$\sum_{m=1}^{2^n} \int_{-1}^{1} \psi_m(t) H_0^{(1)}(|x_\ell^n(\tau) - x_m^n(t)|)dt =$$

$$= A_\ell \exp[ix_\ell^n(\tau)] + B_\ell \exp[-ix_\ell^n(\tau)] - \frac{4q_2 \exp(iq_1 x_\ell^n(\tau))}{k(1-q_1^2)}. \qquad (2)$$

Вхідними змінними тут є наступні параметри: $n -$ номер стадії побудови СПФ, $q_1, q_2 -$ компоненти напрямного вектора плоскої хвилі та вихідні змінні $x_m^n(t)$ геометричної моделі побудови СПФ зі змінною РХ. Вихідними змінними цієї моделі є функції $j_m(t)$, що визначають щільність поверхневих струмів на стрічках.

Серед методів, що тут можна з успіхом застосовувати для визначення вихідних змінних, в першу чергу треба вказати на прямі чисельні методи [2,3]. Але особливо ефективним є чисельно-аналітичний *метод регуляризації Векуа-Карлемана* (РВК) [4-6] і в основному він буде використовуватись. В рамках цього методу на основі відомого *методу малого параметру* виникає можливість суттєво спростити основні математичні моделі (1), (2) та отримати явні вирази для їх вихідних змінних. Так, у випадку моделі слабо наповненої дофрактальної дифракційної ґратки [7-8] маємо наступні асимптотичні вирази для шуканих змінних:

$$\varphi_m(t) \approx c_m / \pi\sqrt{1-t^2}\ , \psi_m(t) \approx -2i\alpha^2\sqrt{1-t^2}\ / k\ .$$

Таким чином, з математичної точки зору, задача розсіювання плоско поляризованої електромагнітної хвилі слабко наповненою ДФДГ може вважатись розв'язаною. З точки зору практичних застосувань взагалі і виділення фрактальних властивостей зокрема, слід проводити дослідження інтегральних характеристик [7-8].

**Висновки.** На основі строгої теорії самоподібних фракталів проведено системний аналіз процесу побудови класу СПФ зі змінною розмірністю Хаусдорфа, який включає розробку структурної схеми процесу побудови, геометричні ілюстрації цього процесу, доведення вичерпності лінійної міри та розрахункової формули розмірності Хаусдорфа.

Наведено приклад застосування СПФ для моделювання дофрактальних дифракційних ґраток (ДФДГ) у вигляді кількох математичних моделей процесу взаємодії плоскої електромагнітної хвилі з системою циліндричних стрічок, що утворюють ґратку. Наводяться асимптотичні вирази для вихідних змінних зазначених моделей у випадку слабко наповнених дофрактальних ґраток.

**Список літератури:** **1.** *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. – М.: Мир, 1964 – 428 с. **2**. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции.– К: Наук. Думка, 1984. – 344 с. **3.** *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численний эксперимент. – М.: ТОО "Янус",1995. – 520 с. **4.** *Кошовий Г. І.* Розсіювання електромагнітних хвиль системами стрічок зі змінною фрактальною розмірністю // Радиофизика и электроника. – Х.: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – 2007.– № 3. – С. 451-455. **5.** *Кошовий Г. І.* Розсіювання електромагнітних хвиль предфрактальними системами циліндричних стрічок // Радиофизика и электроника. – Х.: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. 2007. – № 1. – С. 141-147. **6.** *Кошевой Г. И.* Некоторые классы само подобных фракталов и их использование в радиофизике // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – Т.12, № 11. – С. 28-32. **7.** *Кошовий Г. І.* Системний підхід до дослідження дофрактальних дифракційних ґраток // Радиофизика и электроника. – Х.: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – 2011.– № 1. – С. 3-10. **8.** *Кошовий Г. І., Шматько О.О.* Взаємодія плоскої Е-поляризованої хвилі з слабко наповненою дофрактальною дифракційною решіткою (асимптотична модель) // Журнал нано- та електронної фізики. – 2011. – Т.3, № 2.– С.19-26.

*Надійшла до редколегії 01.09 .2011*